



CDO

Collateralized debt Obligations

Kam Yuen CHU
Ezzoubir KODAD
Dimitre NEDEV

Responsable :

Thierry RONCALLI

Table des matières

Introduction	P.3
1. Description du CDO et du marché	P.5
1.1 La structure de CDO	P.5
1.2 Qu'est ce qu'un CDO ?	P.6
1.3 Perfectionnement de crédit dans les transactions de CDO	P.7
1.4 Perfectionnement de crédit dans les transactions de valeur de marché	P.8
1.5 Les investisseurs dans les différents tranche	P.9
2. CDO Synthétique	P.10
2.1 Structures synthétiques entièrement placées	P.10
2.2 Structures synthétiques partiellement placées	P.11
3. Quelques méthodes d'évaluation des CDO	P.13
3.1 CDO est comme une option	P.13
3.2 Méthode quantitative	P.15
3.3 Méthode Standard & Poor's	P.16
3.4 Méthode de Moody's	P.17
4. Pricing de CDO	P.25
4.1 La distribution de la perte	P.25
4.2 Evaluation	P.26
4.3 Algorithme de simulation	P.27
4.4 Résultats numériques	P.29
Conclusion	P.31
Bibliographie	P.32
Annexe	P.33

Introduction :

Une des caractéristiques des évolutions dans la sphère financière des deux dernières décennies, a consisté dans la prise de conscience croissante de la part des établissements bancaires de l'importance de la gestion du risque et en particulier du risque de crédit en tant que risque principal qu'elles encourent de par leur métier. L'impératif stratégique de gestion du risque de crédit s'est fait de plus en plus pressant à la lumière notamment de la crise financière qui a frappé les pays d'Asie en 1997 et des exigences de performances et de rentabilité des fonds propres qui s'exercent sur les banques.

Le risque de crédit inhérent à un actif financier se définit comme le risque de pertes associé à une incapacité d'un emprunteur (mise en règlement judiciaire, défaut) ou plus généralement à la dégradation de sa capacité à faire face à ses engagements financiers vis-à-vis de ses créanciers. Contrairement aux risques de marché qui sont des risques liés aux évolutions des taux d'intérêt ou des cours de change et à la volatilité de ces évolutions et qui toutes choses égales par ailleurs affectent de façon homogène la valeur des actifs financiers, le risque de crédit est très directement lié à la situation individuelle de chacun des émetteurs/emprunteurs et à sa structure financière. Il est de ce fait plus complexe à mesurer et sa gestion se prête moins aisément à la standardisation.

La gestion traditionnelle du risque de crédit fait référence à trois principes :

- gestion micro du risque de crédit consistant pour la banque de se prémunir en cas de défaut de la contrepartie en structurant la transaction de telle façon à limiter son risque de perte notamment en contrôlant les termes de prêt (tarification de crédit basée sur la prime de risque de l'emprunteur, *credit triggers*, nantissement, syndication).
- gestion macro qui signifie une diversification du risque sur les différents emprunteurs, secteurs industriels et géographique.
- gestion a posteriori du risque de crédit – une fois le crédit accordé, si la qualité de l'emprunteur se détériore, il ne reste généralement plus que deux solutions pour les

banques : avoir recours aux provisions ou bien solder leur position en enregistrant une perte.

Or, les méthodes classiques de gestion du risque de crédit se sont avérées historiquement insatisfaisantes et relativement inefficaces et leur défaut majeur reste de ne pas pouvoir désagréger le risque de crédit de l'actif sous-jacent et de permettre ainsi son transfert vers une partie tierce.

Ce constat est à l'origine de l'émergence de nouvelles techniques de gestion du risque de crédit qui reposent sur la titrisation des créances bancaires et les produits dérivés et qui depuis connaissent une croissance spectaculaire au point qu'aujourd'hui s'imposent comme approche dominante d'une gestion dynamique du risque de crédit.

Sur le marché de transfert de risque, un des segments particulièrement dynamiques est composé par les Collateralized debt obligations (CDO) qui constituent une sous-classe importante des Asset Backed Securities (ABS). En effet, les CDO représentent plus de la moitié des financements structurés en Europe et leur succès n'est pas prêt à se démentir puisque dans la perspective de Bâle 2, les banques seront incitées à transférer les risques de classes d'actifs de moins bonne qualité via ces véhicules.

Nous nous proposerons ainsi à travers notre présentation de donner un aperçu sur quelques méthodes d'évaluation de CDO après avoir établi leurs principales caractéristiques, étape nécessaire pour comprendre la logique de leur modélisation. Dans la première partie, nous verrons donc comment utiliser les CDO en tant qu'instruments de marché financier. Puis nous étudierons les différentes méthodes (quantitative, S&P, Moody's) pour évaluer les CDO. Finalement, nous terminerons par une simulation de CDO fondée sur l'utilisation de copulas.

1. Description du CDO et du marché

1.1 La structure de CDO

Les CDO ont un “Special purpose company or vehicule” (SPV), qui ressemble à un compte avec un actif, un passif et aussi un manager. Typiquement, les CDO se composent d’un portefeuille diversifié d’actifs non liquides et de crédits risqués comme Collateralized bond obligations (CBO) ou les prêts “Collateralized Loan Obligations” (CLO).

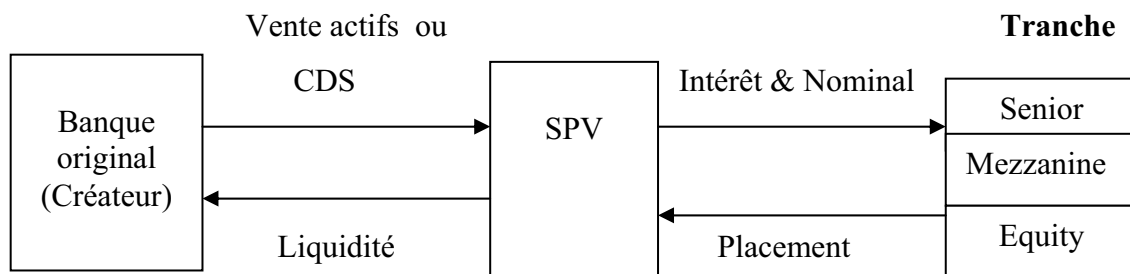


Figure 1: Schema d’un cash CDO

La structure de CDO assigne des produits d'intérêts et de remboursement nominal d'un regroupement de différents instruments d'emprunt à une collection prioritaire de titres appelée tranches. La tranche Senior est payée avant celle de Mezzanine et celles qui est inférieures. D'autre part, ce sont les investisseurs qui achètent les actifs dans les différentes tranches. La tranche Senior semble moins risquée puisque les tranches inférieures absorbent les pertes.

A chaque date de paiement, la tranche equity reçoit des distributions en espèces après que les paiements programmés de dette et d'autres coûts ont été payés. La classe equity s'appelle également la position de “first-loss” dans un portefeuille collatérale. C'est parce qu'il est exposé au risque de la première perte dans un portefeuille. De plus, elle est subordonnée à la tranche mezzanine. La tranche equity est un actif à fort effet de levier, potentiellement hautement rémunérateur puisqu'il reçoit tous les flux qui n'ont pas été versés aux autres parts du CDO, on parle de marge excédentaire. Puis, la tranche mezzanine est subordonnée à la tranche senior. Cette tranche reçoit des marges de crédit élevées et leur rehaussement, bien qu'inférieur à celle de la tranche Senior, leur assure une

protection face à d'éventuels défauts. Par contre, la tranche Senior est placée en première place pour recevoir les flux versés par les obligations.

Pendant la phase de réinvestissement, les distributions de la classe equity se composent de l'intérêt excessif sur un portefeuille rempli, des produits d'intérêts collatéraux moindres restants après le paiement d'intérêt de dette et d'autres honoraires. Le manager réinvestit le principal montant collatéral. Par contre, dans la période de remboursement, les paiements des intérêts excessifs diminuent graduellement comme le principal portefeuille collatéral. Le montant est employé pour rembourser la dette de la classe senior. Après que toutes les classes de dette aient été rachetées, et si la classe equity n'a pas choisi d'appeler la transaction, les paiements principaux restant passe à la classe equity.

Le figure 2 ci-dessous montre un exemple de structure des capitaux permanents

Classes	% de la structure capital
A Rating : AAA ⁺ /AAA	70%
B Rating : AA/ A	14%
C Rating : BBB ⁺ / BBB ⁻	8%
D Rating : BB ⁺ / NR	4%
Equity Non Rating	4%

1.2 Qu'est ce qu'un CDO ?

Les CDO investis en prêts et obligations, sont appelés 'Cash CDO'. En effet, la structure possède directement des actifs. Ainsi, l'amortissement du nominal des parts n'est dû uniquement au paiement du principal. Ce n'est pas toujours le cas. D'autres types de CDO mettent en jeu des dérivés de crédit. Ainsi, certain CDO proposent une exposition à des risques sur des sous-jacents synthétisés (qu'on étudie dans la partie 2), en mettant dans le portefeuille d'actif, non pas le prêt ou l'obligation en question, mais un CDS (Credit Default

Swap). Dans ce cas, le CDO reçoit un paiement périodique d'une contrepartie cherchant à se protéger contre le risque de défaut de l'actif de référence. En retour, le CDO devra payer à l'acheteur de protection les pertes de défaut de l'actif si celui-ci fait défaut. La définition exacte de perte de défaut et défaut peut être négociée selon les exigences du CDO et de l'acheteur de protection.

Tout d'abord, on étudie le 'Cash CDO'. La plupart des CDO peuvent être placés dans l'un ou l'autre de deux groupes principaux : de transactions d'arbitrage et de bilan.

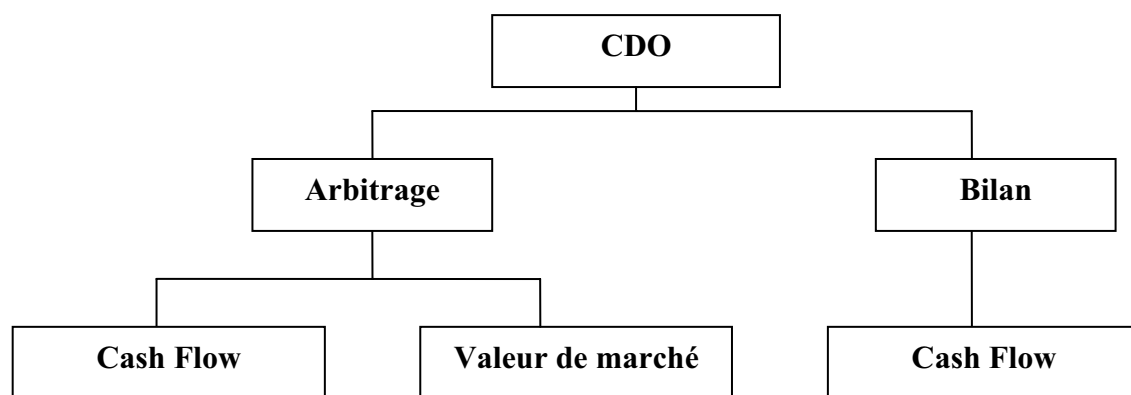


Figure 2 : Répartition des types de CDO

Selon la façon dont le CDO protège ses tranches Senior et Mezzanine des pertes de crédit, il existe des Cash Flow CDO et des CDO à valeur de marché (figure 2 ci-dessus).

Cash Flow CDO : Un Cash Flow CDO est un portefeuille collatérale qui n'est pas soumis au commerce d'actif par le CDO manager. Il fait en sorte de rediriger les cash-flows des parts inférieurs vers celles supérieures en cas de défaut.

Valeur de marché CDO : Les sous-jacents sont périodiquement évalués au prix donné par le marché. Puis une marge est rajouté ou soustraite à cette valeur, afin de prendre en compte les fluctuations futures de la valeur de marché. Si cette valeur descend en dessous

de la part des tranches supérieures, les titres du CDO doivent être vendus et les tranches supérieures payées jusqu'à ce que cette valeur re-dépasse leur part.

Bilan CDO : Les CDO de réajustement de bilan financier sont lancés par des détenteurs de titre, telle que les banques. Leur but est de sortir des engagements de leur bilan. Elles désirent vendre leurs titres ou transférer leur risque. Leur but est de libérer des lignes de crédit, et de diminuer les capitaux économiques et réglementaires nécessaires.

Arbitrage CDO : Le but de l'arbitrage CDO est de capturer l'occasion d'arbitrage qui existe dans le crédit spread, entre le rendement collatéral élevé et les parts de tranches fortement évaluées. L'idée est de créer une garantie avec un coût de placement plus bas que les retours prévus des notes publiées. Ici, les intéressés espèrent ainsi avoir une exposition sur le marché de crédit avec un effet de levier important.

1.3 Perfectionnement de crédit dans des transactions Cash-flow

Dans la tranche senior, les CDO sont protégés par la diffusion de subordination, sur collatéralisation et de spread excessif. La tranche senior est une tranche prioritaire sur tous les Cash-flow générés par la garantie par rapport aux autres tranches non senior. La sur collatéralisation assure une autre protection de la tranche senior en imposant une valeur collatérale minimum en deux tests d'assurance: test d'assurance de valeur et d'intérêt. Le test de valeur exige que la tranche senior (et plus tard les autres tranches) est au moins un certain pourcentage de la garantie fondamentale de collatéral. Ce test est applicable surtout aux tranches inférieures comme mezzanine. Par contre l'autre test, le test d'assurance d'intérêt est appliqué pour s'assurer que les produits d'intérêts collatéraux sont suffisants pour couvrir des pertes et qu'ils effectuent toujours un paiement des intérêts à la tranche senior. Ce support de crédit est également connu comme un spread excessif.

1.4 Perfectionnement de crédit dans les transactions de valeurs de marché

Les taux anticipés sont une forme primaire de perfectionnement de crédit dans des transactions de valeur de marché. Le taux anticipé est le pourcentage maximum du taux de marché qui peut être employé pour publier la dette. Les agences rating, comme Moody's ou S&P, assignent différents taux anticipés à différents types de garanties. Ils dépendent de la volatilité du retour de capitaux, et de la liquidité des capitaux sur le marché. Des capitaux avec une volatilité de retour plus élevée et une liquidité inférieure ont donné des taux

anticipés plus faible.

Le test de valeur minimum (Minimum Net Worth test) est également conçu pour offrir la protection de crédit aux supports de la tranche senior, en créant le ‘coussin’ comme la tranche equity. Ceci est réalisé en imposant que la valeur excessive des actifs du marché sans les notes de dette est supérieure ou égale que la valeur nominale de capitaux propres.

$$\text{MAV} - \text{Dette} \geq \% * \text{Equity}.$$

1.5 Les investisseurs dans les différentes tranches

La structure du CDO crée des profils de risque adaptés aux besoins des investisseurs qui ne peuvent être proposés par une autre structure que les CDO. Ces expositions aux risques correspondent aux besoins des investisseurs, c’est-à-dire, à leur goût pour le risque et à leur contrainte de capital. Certains investisseurs préfèrent avoir des actifs purement spéculatifs tandis que d’autres préfèrent avoir des actifs sans risque. Le CDO permet de séparer le risque de crédit de son portefeuille d’actifs en tranches et de les vendre à l’investisseur attiré par ce risque précis.

1.5.1.1 Les investisseurs en part Equity

Les investisseurs en tranche equity sont en position de financement de l’actif sous-jacent sous forme de participation sans recours. En effet, en cas de rendement faible du CDO, ces investisseurs ne peuvent espérer mieux de leur part Equity que l’actif sous-jacent lui-même. Mais, la structure du CDO permet à ses investisseurs de bénéficier d’un effet de levier important entre le taux de défaut des actifs et le financement de cette tranche.

1.5.1.2 Les investisseurs en autre part

La tranche Senior est généralement attractive car elle propose un rendement supérieur à celui proposé par des firmes et des actifs de même note de crédit et de même maturité. De plus, la tranche Senior propose une distribution des pertes en cas de défaut inférieure à celle d’une obligation individuelle. Lorsqu’une obligation (individuelle) fait défaut, le niveau de pertes supporté par les investisseurs est assez élevé. Enfin, les tranches Senior et Mezzanine d’un CDO permettent de diversifier le risque. Ainsi, le CDO permet à un certain profil d’investisseur de prendre position sur de nouveaux industriels, de nouveaux pays, en conservant ses contraintes sur les risques encourus.

2 CDO Synthétique

Dans la plupart des cash-flows CDO, des capitaux sont transférés dans le SPV. C'est une analyse de prêt à prêt qui est nécessaire pour vérifier que se soit conforme au programme de titres et aussi pour vérifier qu'il n'y a aucune clause spéciale attachée à aucun prêt limitant son transfert.

2.1 Structures synthétiques entièrement placées

Historiquement, le CDO entièrement placé a été le premier à être employé comme une alternative à une structure plus traditionnelle. Dans un CDO synthétique entièrement placé, les SPV montent ses notes pour approximativement 100% d'un portefeuille de référence. Le montant de ces notes est généralement investi dans des valeurs de titres de haute qualité comme garantie qui ont un risque de 0%. Afin de protéger son exposition de risque de crédit dans un prêt de portefeuille, la banque originale (créateur) entre dans un CDS avec soit le même SPV soit avec une banque de l'OCDE. Avec les CDS, le créateur achète une protection de crédit en échange d'une prime.

Nous montrons les deux mécanismes de structures synthétiques entièrement placées ci-dessous.

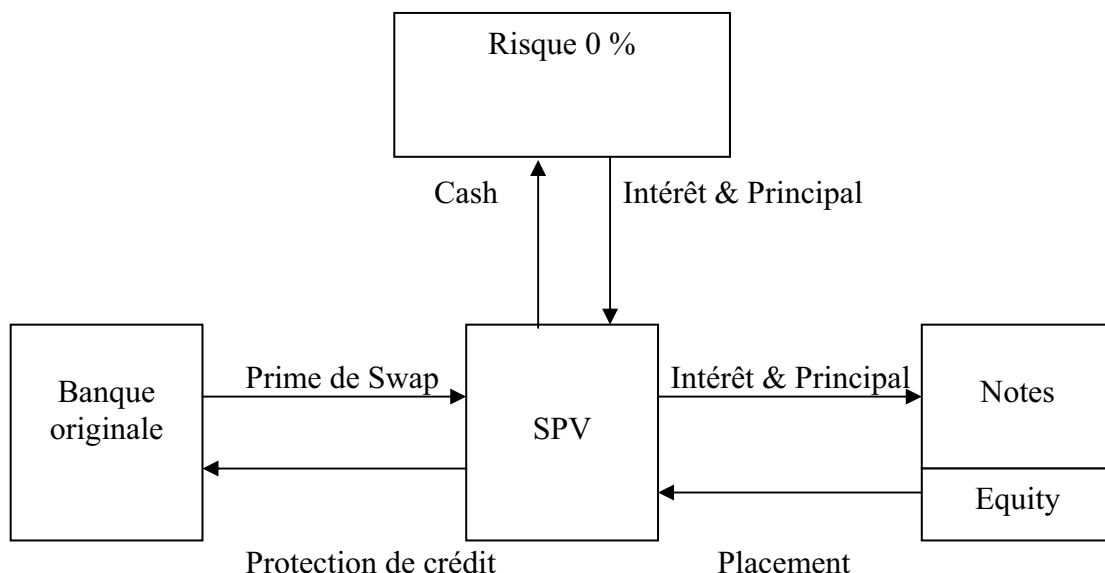


Figure 3 : CDO synthétiques entièrement placées avec CDS et SPV

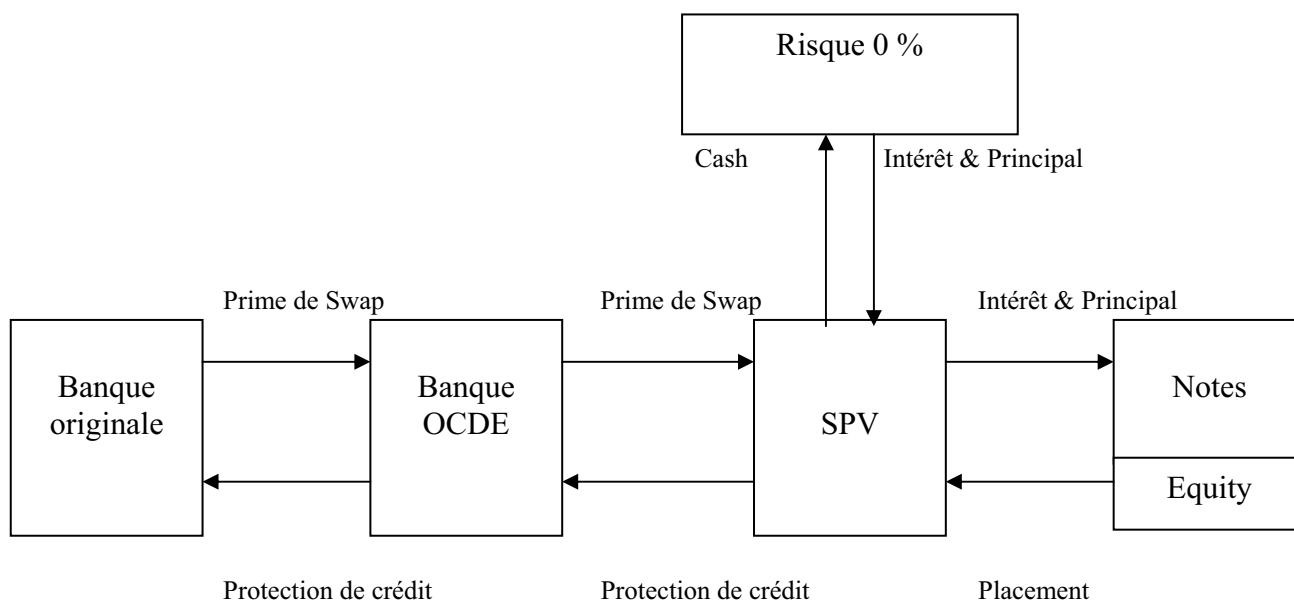


Figure 4: CDO synthétiques entièrement placées avec CDS et la banque OCDE

La tranche equity détenue par le créateur (Banque originale) apporte un poids de risque de 100%. Par conséquent, comme avec l'exemple sur la figure 3, la banque réaliserait un premier dégagement capital. Un capital de contrôle additionnel dépendrait de la présence d'une banque de l'OCDE dans sa structure. Si les CDS sont directement liés avec le SPV (figure 3), et si les recettes de la note sont investies dans des actifs avec un risque de 0%, alors moins capital de contrôle sont ajoutés à la transaction. Par contre, si les CDS sont directement liés avec une banque de l'OCDE (figure 4), le capital de contrôle sur les CDS est un certain pourcentage du montant notionnel du même swap.

2.2 structures partiellement placées

Dans la structure du CDO entièrement placé, la banque originale est loin de réaliser une utilisation de capitale efficace. Les CDO-CLO entièrement placés peuvent parfois être un instrument relativement cher. Cependant, il est vrai qu'un instrument de CDO-CLO reste moins exposé au risque que le spread de crédit qui peut s'élargir.

Les structures ci-dessous qui sont d'une transaction partiellement placée de CDO, sont très semblables à celle entièrement placée. La banque originale (créateur) achète la protection de crédit directement contre un SPV (la figure 5) ou une banque de l'OCDE (figure 6). La différence est que le SPV publie une quantité inférieure de notes parce qu'il garantit une

quantité inférieure de collatéral. Le «super Senior CDS» est un haut papier financier de qualité, avec pratiquement une probabilité zéro d'être exposé à une perte de crédit.

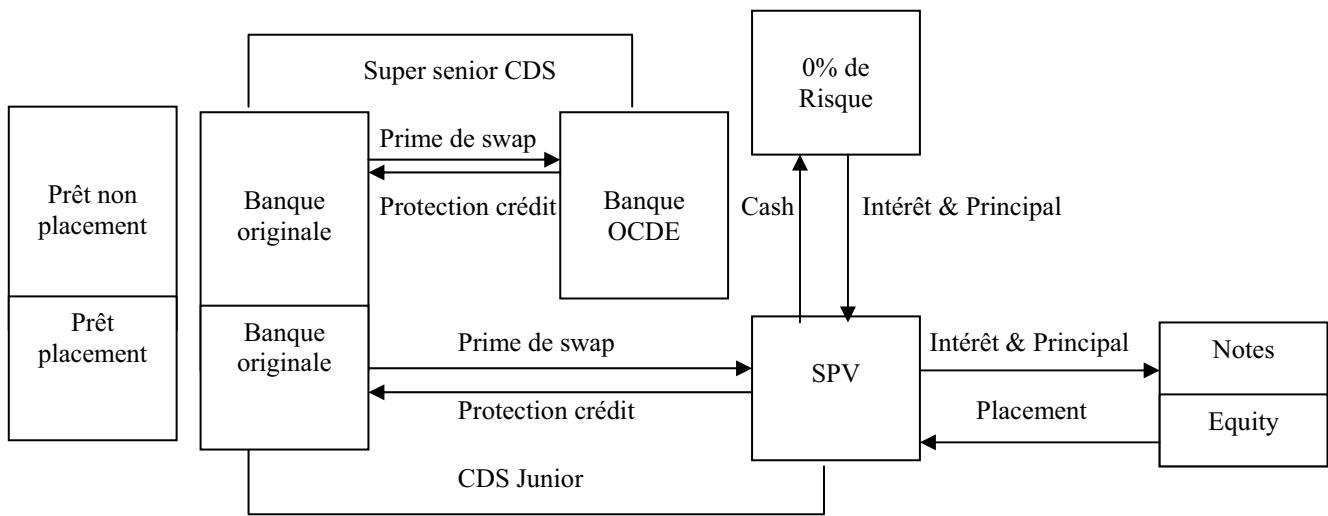


Figure 5 : CDO synthétiques partiellement placées avec CDS et la banque OCDE

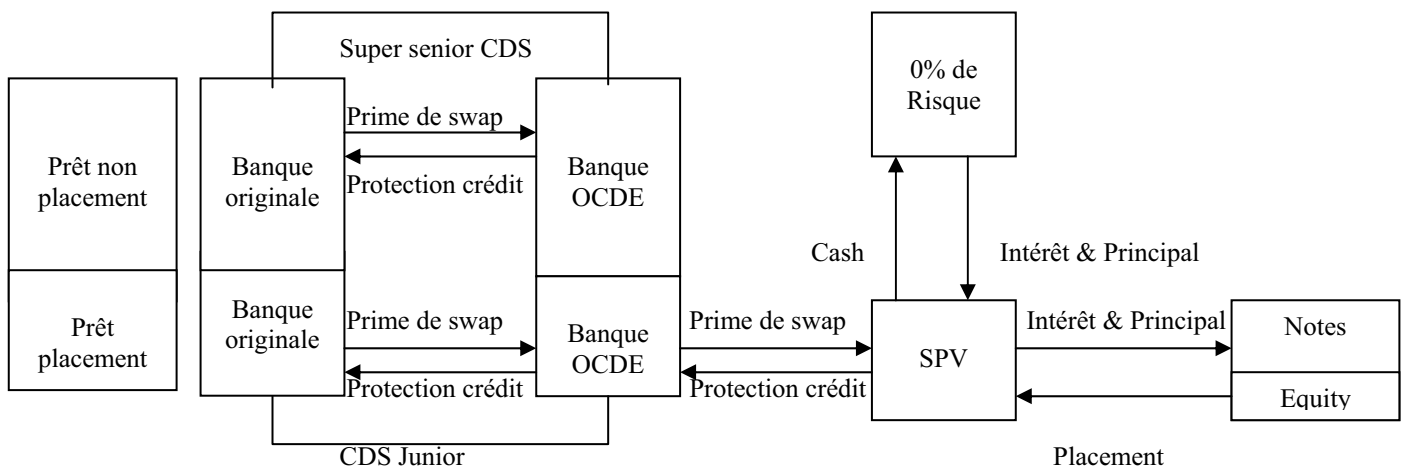


Figure 6 : CDO synthétiques partiellement placées avec CDS et SPV

3 Quelques méthodes d'évaluation des CDO

Il y a plusieurs facteurs qui affectent la valeur de toutes les tranches de CDO (de dette et d'equity). Mais le plus important est la qualité de crédit dans un portefeuille fondamental, qui dépend de la probabilité de défaut et de la diversification.

Nous allons essayer de traiter plusieurs méthodes pour calculer la valeur du CDO.

3.1 CDO est comme une option

La dernière approche est d'évaluer une valeur de marché du CDO comme un instrument dérivé dans un portefeuille collatéral. Nous pouvons commencer par le schéma ci-dessous pour expliquer la structure du bilan du CDO.

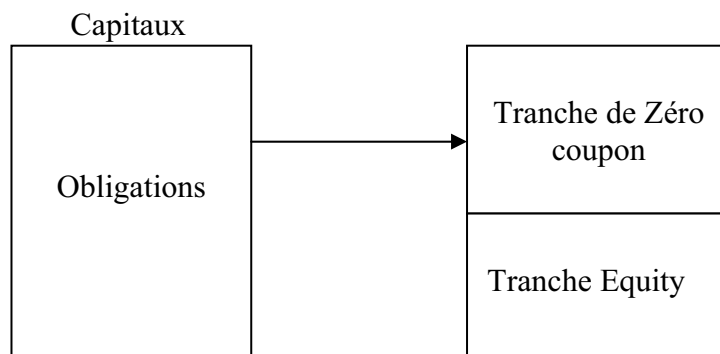


Figure 7 : Simple Bilan de CDO

Nous pouvons écrire la valeur des actifs comme :

$$\mathbf{Capitaux = Tranche de zéro coupon + Capitaux propres} \quad (1)$$

En fait, nous savons que le CDO est caractérisé par plusieurs tranches qui ont différent rating selon le type de protection offert aux investisseurs. Depuis qu'elles offrent un niveau différent de risque de crédit (selon leurs Ratings), les prix du strike et la probabilité du défaut sont différents.

Nous supposons qu'il y a 3 tranches principales : Senior, Mezzanine et Equity.

Le profit de l'investisseur de la tranche Equity peut être défini comme :

$$P_E = E - \min (E, L) \quad (2)$$

$$P_E = \text{Max} (E - L, 0) = \text{Put} (E, L)$$

Où L est la perte collatérale,
E est la taille de la tranche equity
Put(E, L) est la tranche equity.

Par conséquent, si les pertes (L) sont plus grandes que la taille de la tranche Equity (E), la tranche Equity est épuisée et la différence est payée par les investisseurs de la tranche mezzanine.

Il est toujours possible, à partir de l'équation (2) de récupérer la tranche Equity comme option d'achat :

$$P_E = A - Z - \min (A-Z, A-L) \quad (3)$$

$$P_E = A-Z + \max (A-Z, L-A)$$

$$P_E = \max (A-Z, 0)$$

Où A est valeur de l'actif à maturité,
Z est la valeur de la tranche à zéro coupon

Le profit de l'investisseur de la tranche Senior est :

$$P_S = A - E - \max (L - E, 0) \quad (4)$$

$$P_S = A - E - \text{Call} (E, L)$$

Où Call(E, L) est la tranche equity.

Puis le profit pour l'investisseur de la tranche mezzanine:

$$P_M = \max [\min (M-E, M-L), 0]$$

$$P_M = (M-E) - \max (L-E, 0) + \max (L-M, 0) \quad (5)$$

Où M est la taille de la tranche mezzanine.

Dans l'équation (5), le profit de la tranche mezzanine est identique à celui d'un portefeuille qui contient une obligation à zéro coupon et deux options d'achat (comme une longue option d'achat sur le prix d'exercice M et une courte option d'achat sur le prix d'exercice E.)

3.2 Méthodes quantitatives stochastiques

Nous exposons ici, l'un des modèles probabiliste pour déterminer la distribution des temps de défaut. Soit τ_i le temps de défaut associé à l'actif i , le temps de d'arrêt associé au premier défaut du portefeuille, τ , s'écrit, $\tau = \min_i \tau_i$

Notons : $F_k(t)$ la fonction de répartition du temps de défaut de l'émetteur k,

$F_k(t) = Q(\tau_k \leq t)$ la probabilité de défaut avant la date t.

Les lois associées aux temps de défauts des émetteurs peuvent être déterminées suivant différentes méthodologies. L'une d'entre elle consiste à considérer un modèle à intensité (déterministe ou stochastique).

Après avoir déterminé chacune des lois associées aux temps de défaut des émetteurs, il est nécessaire de préciser leur structure de dépendance. Nous pouvons utiliser une fonction de répartition de la loi normale centrée réduite notée N.

$$G_i = \alpha_i \cdot H_0 + \sqrt{1 - \alpha_i} \cdot H_i \quad (6)$$

Où G est un vecteur gaussien centré de matrice de variance covariance K de matrice de variance-covariance $K_{ij} = \alpha_i \cdot \alpha_j$ si $i \neq j$.

(H_0, \dots, H_n) est un vecteur gaussien centré réduit.

Alors le temps de défaut se calcule comme suit :

$$\tau_i = F_i^{-1}(\Phi(G_i)) \quad (7)$$

Ces fonctions sont appelées fonction de copule normale.

Dans ce qui suit nous allons présentés d'une manière très bref le modèle à intensité stochastique. Celui-ci stipule que, pour un petit intervalle de temps, les actifs font défaut de manière indépendante, avec une probabilité proportionnelle à une intensité commune de défaut. Sur l'intervalle suivant, elle est encore indépendante, et proportionnelle à une nouvelle intensité. L'évolution de cette intensité suit un processus stochastique et on a :

$$P(\tau < t + \Delta t | F_t) = E[\exp(\int_t^{t+\Delta t} -\lambda_u du) | F_t] \quad (8)$$

Avec, F_t la filtration associée, autrement dit, l'information disponible en t .

La dynamique du processus d'intensité étant donnée par,

$$d\lambda(t) = k(\theta - \lambda(t))dt + \sigma\sqrt{\lambda(t)}dW(t) \quad (9)$$

Où W est un mouvement brownien standard. On obtient pour un titre fixé, la probabilité de survie suivante

$$S(t) = 1 - E\left[\exp\left(\int_t^{t+s} -\lambda_u du\right) | F_t\right] = 1 - \exp[\alpha(s) + \beta(s)\lambda(t)] \quad (10)$$

En sachant que des solutions explicites pour $\alpha(s)$ et $\beta(s)$ ont été calculées par Duffie et Gârleanu (1999)¹

3.3 Méthode Standard & Poor's

Dans le Rating de CDO, la méthode de S&P emploie un modèle de simulation de Monte Carlo appelé 'CDO Evaluator'. Ce modèle estime la distribution de taux de défaut dans un portefeuille collatérale. Il prend en compte le crédit rating de l'emprunteur, la probabilité de défaut, la maturité et la corrélation entre chaque actif. Le résultat est la distribution de la probabilité du taux de défaut d'un portefeuille globale.

S&P n'emploie pas le score de diversité de la méthode de Moody pour simplifier le calcul de la corrélation de défaut entre chaque actif dans le portefeuille. Plutôt, elle assume

¹ Dans « Risk and Valuation of Collateralized Debt Obligations »

une corrélation des actifs entre les actifs des secteurs d'entreprise différente et entre les actifs du même secteur de l'entreprise.

Le générateur de simulations donne un grand nombre de valeurs distribués selon une normale multivariée $X \sim N(0,1)$. À chaque expérience, le tirage de l'actif i est comparé à son seuil de défaut, et s'il est inférieur, l'actif fait défaut.

Le seuil de défaut est calculé par la probabilité de défaut des actifs et la maturité. Tous les actifs ayant fait défaut sont additionnés et divisés par le nombre total des actifs présents dans le portefeuille. Ceci estime le taux de défaut dans la $j^{\text{ème}}$ expérience.

3.4 Méthode de Moody's

Moody's affecte à chaque actif une note ; celle-ci correspond à son rating. Ceci permet de calculer un rating moyen, pondéré par les nominaux de chaque actif. Il s'agit précisément du FRMA.

$$FRMA = \frac{\sum_{i=0}^N V_i * R_i}{\sum_{i=0}^N V_i} \quad (12)$$

Où R_i nominal de l'actif i .

V_i : nominal de l'actif i .

En réalité, pour une maturité donnée, le facteur de rating correspond à une probabilité de défaut. On pourra trouver en annexe, les tableaux Moody's des facteurs de rating ainsi que des probabilités de défaut.

Le score de diversité, notée DS, représente un nombre d'actifs indépendants. Moody's modélise le portefeuille sous-jacent réel par un portefeuille virtuel de DS actifs identiques et indépendants. La probabilité de défaut de chacun de ces actifs étant égale à la probabilité de défaut moyenne déduite du FRMA.

Pour rendre ce portefeuille fictif assez représentatif du portefeuille réel, ces deux portefeuilles ont la même espérance de pertes et sensiblement la même variance : facteur de rating et DS.

Moody's considère 33 secteurs d'activité et 2 zones géographiques. Il considère que les actifs appartenant à des secteurs différents ou à des zones géographiques différentes (Europe/US) sont indépendants. Cependant, pour certains secteurs, on ne fait pas de distinction géographique (le secteur est vu « mondial »).

La formule de calcul du score de diversité est la suivante :

$$DS = \sum_i \left(\frac{\sqrt{1 + 8 * N_i} - 1}{2} \right) \quad (13)$$

Où N_i est la somme des contributions des actifs appartenant au secteur i , et est défini comme suit :

$$N_i = \sum_j \text{Min} \left(1, \frac{\text{Nominal}_j}{\text{Nominal.Moyen}} \right) \quad \text{Où } j : \text{Actif}_j \text{ appartenant au secteur } i$$

Considérons un exemple d'étude d'un portefeuille sous-jacent, selon la méthodologie de Moody's.

Soit le portefeuille présenté dans le tableau suivant :

Caractéristiques du portefeuille				
Actif	Nominal	Rating	Secteur	Géo
A	120	A3	1	US
B	10	A2	1	Europe
C	80	A1	6	US
D	60	A2	4	Europe
E	60	A1	4	US

A l'aide de la table des facteurs de rating de Moody's, en annexe A, et pour une maturité de 10 ans, on obtient $FRMA=120,6$ ce qui équivaut à une cote de crédit A2. La probabilité de défaut est donc 1,20%.

Puis Moody's utilise un facteur de stress². Supposons que le rating voulu pour une tranche soit Aa1. le rating moyen du portefeuille est A2 (déduit du rating factor de 120) ; puis, Moody's affecte un facteur de stress de 1,31 à A2 et 1,4 à Aa1. Afin de noter la tranche, Moody's considère alors une probabilité ajustée de défaut de :

$$p^* = 0,012 \times \frac{1,4}{1,31} = 0,0128$$

De plus le nominal moyen obtenu est 66.

Les tableaux suivants présentent les contributions.

Contribution des actifs			Par secteur	
Actif	Nominal	Contribution	Secteur	Contribution
A	120	1	1	1.15
B	10	0.15	4	1.82
C	80	1	6	1
D	60	0.91		
E	60	0.91		

Dans cet exemple, les actifs du secteur 4 sont considérés comme indépendants car d'origines différentes. On obtient ainsi :

$$DS_{Secteur1} = \frac{\sqrt{1 + 8 * (0.15 + 1)} - 1}{2} = 1.63$$

$$DS_{Secteur4} = \frac{\sqrt{1 + 8 * (0.91)} - 1}{2} + \frac{\sqrt{1 + 8 * (0.91)} - 1}{2} = 1.88$$

$$DS_{Secteur6} = 1$$

Ainsi Moody's calcule les pertes de chaque tranche pour chacun des scénarios possibles : 0 défaut, 1 défaut, ..., DS défauts. Puis chaque scénarios est probabilisé suivant une loi binomiale en utilisant la méthode appelée « Binomial Expansion Technique » que sera expliquée dans le chapitre suivant.

² Moody's « stresse » la probabilité de défaut suivant le cote de crédit souhaité. L'affectation d'un facteur de stress selon la notation désirée de la tranche est destinée à augmenter la probabilité de défaut.

La Méthode « Binomial Expansion Technique »

La BET constitue une approche fiable et satisfaisant d'estimation des pertes totales espérées pour les CBO/CLO. Elle offre un certain nombre d'avantages dans la détermination de rating approprié :

- elle capte les effets des « événements se situant dans les extrêmes de la distribution = tail events » en représentant tous les possibles scénarii de défauts.
- sa mise en œuvre est beaucoup moins intensive en calcul que la simulation Monte Carlo

Cette Méthode est basée sur le concept de score de diversité (DS) expliquée ci-dessus. Rappelons que l'idée est de construire un groupe (pool) fictif d'actifs homogènes et non corrélés (prêts ou obligations) qui va reproduire le comportement en termes de défaut du vrai pool.

Dans ce cas, le comportement du vrai pool peut être modélisé en utilisant un portefeuille constitué de DS obligations, chaque obligation ayant la même valeur (égal au collatéral divisé par DS). Il est également supposé que toutes ces obligations ont la même probabilités de défaut (déterminée par la probabilité moyenne pondérée du défaut associé au vrai pool).

En fin de compte, en ce qui concerne les défauts, le comportement de ce pool homogène de DS actifs peut être complètement décrit en termes de DS scénarios possibles : un défaut, deux défauts, jusqu'à DS défauts.

La probabilité P_j que le scénario j (c'est-à-dire l'occurrence de j défauts) se produit peut être calculée en utilisant la formule binomiale :

$$P_j = \frac{DS!}{j!(DS-j)!} \cdot p^j \cdot (1-p)^{DS-j}$$

Où p est la probabilité moyenne pondérée de défaut du pool (stressée par le facteur approprié).

Si on suppose que E_j est la perte pour la note à évaluer sous le scénario j (la perte exprimée en pourcentage peut facilement se calculer en prenant la valeur des cash flow reçus par le porteur de la note, en supposant qu'il y a j défauts et en utilisant le taux de coupon de la note comme taux d'actualisation)

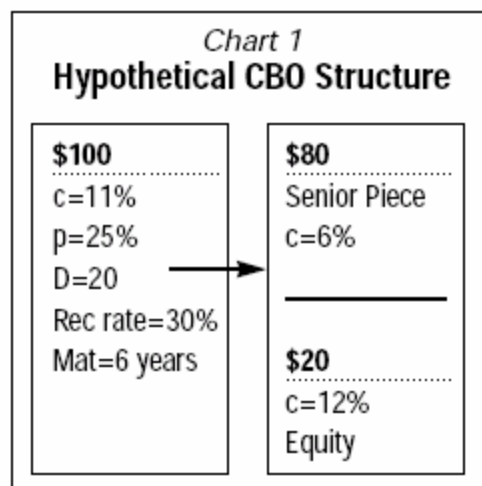
Finalement, en prenant en compte tous les scénarios possibles, la perte totale espérée (EL), est calculée comme suit :

$$EL = \sum_{j=1}^{DS} P_j \cdot E_j \quad (14)$$

Exemple d'application de la BET

Nous avons utilisé l'exemple produit par Moody's dans son article intitulé « The Binomial Expansion Method Applied to CBO/CLO Analysis », et avons implémenté un programme sous VBA pour obtenir modéliser cette méthode.

On Considère la structure suivante, avec deux tranches :



On suppose que le pool collatéral a un score de diversité de 20, une probabilité moyenne de défaut de 25% (après application du facteur de stress), un taux de recouvrement de 30%, une maturité de 6 ans, et qu'il paie un coupon moyen de 11%. En plus, on suppose – pour simplifier- que les obligations sont remboursables in fine et que les intérêts sont réinvesti à 11% par an.

Evidemment la tranche Senior a la priorité de recevoir les cash flow générés par le collatéral.

En principe, la partie Senior est supposée recevoir les cash flow suivants :

{2.4, 2.4, 2.4, 2.4, 2.4, 2.4, 2.4, 2.4, 2.4, 2.4, 2.4, 2.4 +80}

Tant que le nombre de défauts reste en –dessous de 10, la partie Senior ne supportera pas de pertes. Néanmoins à partir de 10 défauts, la tranche Senior va supporter des pertes. Les pertes sous chaque scénario de défaut sont calculées par actualisation, en appliquant un taux d’actualisation de 6%.

Par exemple si il’y a 10 défauts, la tranche Senior reçoit {2.4, 2.4, 2.4,2.4, 2.4, 2.4, 2.4, 2.4, 2.4, 2.4, 78.86} procurant une perte de 3,1%. Dans ce cas, il a été supposé que les défauts sont ‘front-loadés’ c’est-à-dire que 50% se produisent à la fin de la première année et 10% à la fin de chaque année suivante.

La capture d’écran suivante récapitule les résultats de notre calcul.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1															Year	DF		
2															0,5	0,370874		
3	Face Value	100													1	0,342596		
4	Coupon	1%													1,5	0,315142		
5	Default prob.	25%													2	0,868497		
6	Diversity Score	20													2,5	0,862609		
7	RecoveryRate	30%													3	0,837484		
8	Maturity	6													3,5	0,810092		
9															4	0,789409		
10	Year	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6		4,5	0,766417		
11	Loss distrib.	0%	50%	0%	10%	0%	10%	0%	10%	0%	10%	0%	10%		5	0,744094		
12															5,5	0,722421		
13															6	0,70138		
14	Face	100,00%	75,00%	75,00%	70,00%	70,00%	65,00%	65,00%	60,00%	60,00%	55,00%	55,00%	50,00%					
15	Recovery	0,00%	7,50%	7,50%	9,00%	9,00%	10,50%	10,50%	12,00%	12,00%	13,50%	13,50%	15,00%					
16	Interest on recovery	0,00%	0,41%	0,41%	0,50%	0,50%	0,58%	0,58%	0,66%	0,66%	0,74%	0,74%	0,83%					
17	Collat coupon	5,50%	4,13%	4,13%	3,85%	3,85%	3,58%	3,58%	3,30%	3,30%	3,03%	3,03%	2,76%					
18	Available cash	5,50%	6,65%	7,82%	9,14%	10,49%	11,80%	13,26%	14,68%	16,26%	17,82%	19,55%	21,28%					
19	After interest paid	1,90%	3,05%	4,32%	5,54%	6,89%	8,20%	9,66%	11,08%	12,66%	14,22%	15,95%	17,68%					
20																		
21	Senior CFs	2,40%	2,40%	2,40%	2,40%	2,40%	2,40%	2,40%	2,40%	2,40%	2,40%	2,40%	2,40%					
22	Senior NPV	80,00%																
23																		
24																		
25																		
26																		
27																		
28																		
29																		
30																		
31																		
32																		
33																		
34																		
35																		
36																		
37																		
38																		
39																		
40																		
41																		
42																		
43																		
44																		
45																		
46																		
47																		
48																		
49																		
50																		
51																		
52																		
53																		
54																		
55																		
56																		
57																		
58																		
59																		
60																		
61																		
62																		
63																		
64																		
65																		
66																		
67																		
68																		
69																		
70																		
71																		
72																		
73																		
74																		
75																		
76																		
77																		
78																		
79																		
80																		

Les résultats essentiels sont repris dans le tableau ci-dessous. La première colonne indique le nombre de défauts sous le scénario ; la deuxième colonne indique la probabilité que ce scénario se produit et la troisième colonne indique les pertes sous ce scénario.

# Defaults	Prob.	Loss
0	0,3171%	0,00%
1	2,114%	0,00%
2	6,695%	0,00%
3	13,390%	0,00%
4	18,969%	0,00%
5	20,233%	0,00%
6	16,861%	0,00%
7	11,241%	0,00%
8	6,089%	0,00%
9	2,706%	0,00%
10	0,992%	3,10%
11	0,301%	7,90%
12	0,075%	12,69%
13	0,015%	17,48%
14	0,003%	22,28%
15	0,000%	27,07%
16	0,000%	31,56%
17	0,000%	34,78%
18	0,000%	38,05%
19	0,000%	41,61%
20	0,000%	45,16%

La perte totale espérée est la suivante

$$EL = 0,3171\% \times 0,00\% + \dots + 0,000\% \times 45,16\% = 0,067\%$$

En se référant à la table « Moody's Idealized Cumulative Expected Loss Rates» (table3 de l'annexe A), qui indique la perte totale espéré pour les différents ratings et les différentes maturités ; en déduit que la tranche Senior va être noté **Aa3** (le taux est égal à 0.10065% pour Aa3)

4 Pricing de CDO

Notre analyse est organisée comme suit : Après une description de la distribution de la perte pour les différentes tranches de CDO dans le §4.1, §§4.2 et 4.3 vont présenter une méthode d'évaluation basée sur les fonctions copules pour évaluer les tranches de CDO. Dans le § 4.4 nous étudierons l'impact des différentes hypothèses directrices (corrélation et taux de recouvrement) sur les prix des tranches du CDO.

4.1. La distribution de la perte

Tous d'abord, nous citons les notations utilisées tout au long de l'analyse :

- N est le nombre des « noms » inclus dans le groupe *collateral*.
- A_i est le notional du $i^{\text{ème}}$ nom.
- R_i est le taux de recouvrement (déterministe) correspondant au $i^{\text{ème}}$ nom.
- $T = t_i$ est la maturité mesurée en années à partir de la date d'aujourd'hui $t_i = 0$.
- τ_i est le temps de défaut pour le $i^{\text{ème}}$ nom (nous avons considéré le modèle à intensité stochastique).
- $B(0,t)$ est le facteur de discount utilisant le taux sans risque (supposé être déterministe).
- s est le juste prix de la tranche du CDO, exprimée en points de base.

On considère $L_i = (1 - R_i)A_i$, la perte pour le $i^{\text{ème}}$ nom. On peut, donc, définir la perte accumulée $L(t)$ sur le portefeuille à l'instant t comme suit :

$$L(t) = \sum_{i=1}^N L_i \cdot 1_{\{\tau_i < t\}} \quad (15)$$

La distribution des pertes va varier en fonction de la priorité de chaque tranche ; si on considère que Γ et Δ sont les seuils inférieure et supérieure qui définissent une tranche donnée. Alors la priorité de chaque tranche sera définie par la position relative de ces deux seuils. Si $\Gamma = 0$ alors on parle de la tranche *equity* ; si $\Gamma > 0$ et $\Delta < \sum_{i=1}^N A_i$, on considère alors la

tranche *mezzanine*, et finalement si $\Delta = \sum_{i=1}^N A_i$ on parle de la tranche *senior*.

Désormais, la perte cumulée $L^{\Gamma,\Delta}(t)$ pour une tranche donnée, sera égale à zéro si $L(t) < \Gamma$, égale à $L(t) - \Gamma$ si $\Gamma \leq L(t) < \Delta$, et égale à $\Delta - \Gamma$ si $L(t) \geq \Delta$.

D'une manière formelle on a

$$L^{\Gamma,\Delta}(t) = [L(t) - \Gamma] \cdot 1_{\{\Gamma, \Delta\}}(L(t)) + (\Delta - \Gamma) \cdot 1_{\{\Delta, \sum_{i=1}^N A_i\}}(L(t)) \quad (16)$$

4.2. Evaluation

Le prix d'une tranche de CDO est défini par l'équivalence entre la jambe relative au défaut (DL) est celle relative aux primes (PL).

En utilisant la représentation donnée par Gregory & Laurent [12], on peut exprimer DL comme l'espérance de la valeur actuelle (des paiements en cas de défaut) depuis le temps de défaut :

$$DL = E \left[\int_0^T B(0,t) dL^{\Gamma,\Delta}(t) \right] \quad (17)$$

La jambe relative aux primes peut être exprimé comme l'espérance de la valeur présente des primes payées, pondérés par le capital restant (le montant originale diminué des pertes accumulées) à chaque date de paiement, et qui doit être payée $1/\alpha$ fois³ par an :

$$PL = E \left[\sum_{i=1}^n s_{\Gamma,\Delta} \cdot \alpha \cdot B(0,t_i) \cdot \min\{\max[\Delta - L(t_i), 0], \Delta - \Gamma\} \right] \quad (18)$$

La valeur de la tranche de CDO est ensuite définie comme étant le *spread* $s_{\Gamma,\Delta}^*$ tel que :

$$s_{\Gamma,\Delta}^* \Rightarrow PL(s_{\Gamma,\Delta}^*) - DL(s_{\Gamma,\Delta}^*) = 0$$

Par conséquent,

$$s_{\Gamma,\Delta}^* = \frac{E \left[\int_0^T B(0,t) dL^{\Gamma,\Delta}(t) \right]}{E \left[\sum_{i=1}^n s_{\Gamma,\Delta} \cdot \alpha \cdot B(0,t_i) \cdot \min\{\max[\Delta - L(t_i), 0], \Delta - \Gamma\} \right]} \quad (19)$$

L'implantation numérique de ces différentes formules est explicité dans la partie qui suit.

³ $\alpha = 1$ pour une fréquence annuelle, $\alpha = 1/2$ pour une fréquence semestrielle, etc.

4.3. Algorithme de simulation ⁴

L'algorithme présenté ici, consiste à une procédure de Monte Carlo développée spécialement pour l'estimation de la distribution de perte du groupe de "collateral" d'un CDO et la simulation du *spread* $s_{\Gamma,\Delta}^*$ pour des tranches avec des seuils Γ et Δ définis. La procédure de simulation peut être résumé comme suit :

1. Pour chaque simulation k répéter les étapes suivantes :
 - a. Générer un vecteur de dimension N de variables uniformes corrélées en utilisant l'algorithme présenté en annexe B.1.
 - b. Pour chaque "nom", transformer la variable uniforme correspondante en un taux de défaut en utilisant la procédure présenté en annexe B.2.
 - c. Trier le vecteur de dimension N des temps de défaut τ^k dans l'ordre croissant, et sélectionner le vecteur des temps de défaut $\theta^k = (\tau_1^k, \tau_2^k, \dots, \tau_M^k)$ tel que $\tau_j^k \leq T \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}$
 - d. Calculer les flux des paiements en cas de défaut selon la procédure suivante :
 - i. En se basant sur la réalisation du vecteur θ^k , simuler la perte accumulée en calculant $L^k(T)$, comme décrit dans la formule (15).
 - ii. Si $L^k(T) < \Gamma$, les paiements de défaut sont égaux à 0.
 - iii. Si $\Gamma \leq L^k(T) < \Delta$, sélectionner le temps de défaut $\tau_\gamma^k = \inf\{t > 0 / L(t) \geq \Gamma\}$ et pour chaque défaillant $m \in \{1, 2, \dots, M\}$ dont le temps de défaut est supérieure ou égal à τ_γ^k , simuler le paiement actualisé DL_w^k , c'est-à-dire, en se donnant le vecteur des temps de défaut $\theta_{\Gamma,\Delta}^k = (\tau_\gamma^k, \tau_{\gamma+1}^k, \dots, \tau_M^k)$, simuler $DL_w^k = B(0, \tau_w^k) \cdot L_w = B(0, \tau_w^k) \cdot (1 - R_w) \cdot A_w$ pour $w \in \{\gamma, \gamma + 1, \dots, M\}$, et finalement faire la somme de tous ces paiement, i.e. $DL^k = \sum_{w=\gamma}^M DL_w^k$.

⁴ Une partie du programme implémenté (en Gauss) est donnée en annexe C.

- iv. Si $L^k(T) \geq \Delta$ sélectionner τ_γ^k comme décrit ci-dessus, et calculer le temps de défaut suivant: $\tau_\delta^k = \inf\{t > 0 / L(t) \geq \Delta\}$. Ensuite pour chaque défaillant $m \in \{1, 2, \dots, M\}$ dont le temps de défaut est supérieure ou égal à τ_γ^k et est inférieure à τ_δ^k , simuler DL_w^k , c'est-à-dire, en se donnant le vecteur des temps de défaut $\theta_{\Gamma, \Delta}^k = (\tau_\gamma^k, \tau_{\gamma+1}^k, \dots, \tau_\delta^k)$, simuler $DL_w^k = B(0, \tau_w^k) \cdot L_w = B(0, \tau_w^k) \cdot (1 - R_w) \cdot A_w$ pour $w \in \{\gamma, \gamma + 1, \dots, \delta\}$,

- e. Calculer la jambe relative aux paiements des primes selon la procédure suivante :

- i. En se basant sur la réalisation du vecteur θ^k , pour chaque date de paiement de prime (t_1, t_2, \dots, t_n) simuler la perte accumulée $L^k(t_i)$ pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ensuite calculer la jambe suivante :

$$PL^k = E \left[\sum_{i=1}^n \gamma \cdot B(0, t_i) \cdot \min \left\{ \max [\Delta - L^k(t_i), 0], \Delta - \Gamma \right\} \right]$$

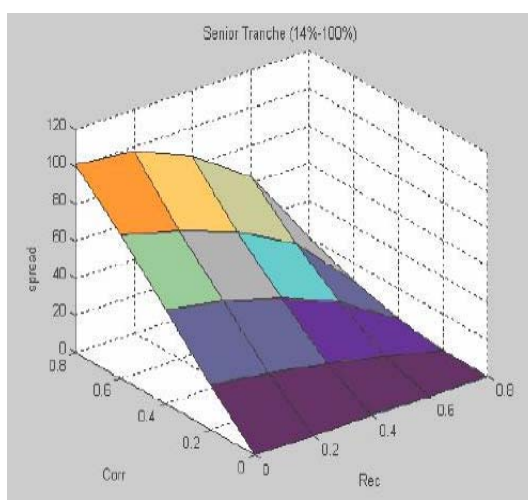
2. Calculer la moyenne arithmétique de DL^k et PL^k et applique la formule (19) pour déterminer la valeur du *spread* $s_{\Gamma, \Delta}^*$.

4.4. Résultats numériques

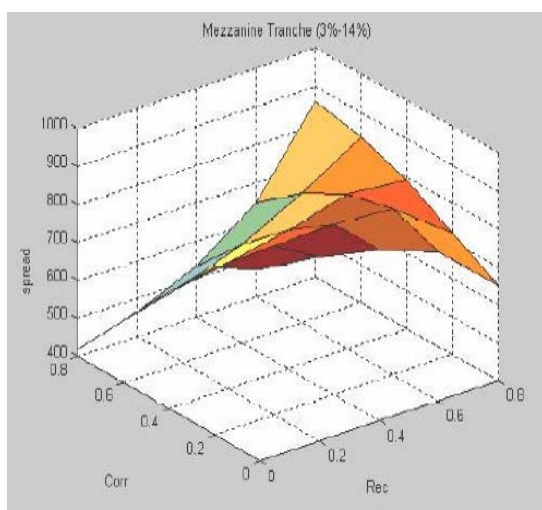
L'application de l'algorithme ci-dessus, concerne un CDO dont les caractéristiques sont :

$T = 5 \text{ ans}$	
$N = 100$	
$A_i = 100 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$	
$S = 150 \text{ bp}$	
$\text{Taux sans risque} = 5\%$	
<i>Tranche Equity</i>	<i>0%-3%</i>
<i>Tranche Mezzanine</i>	<i>3%-14%</i>
<i>Tranche Senior</i>	<i>14%-100%</i>

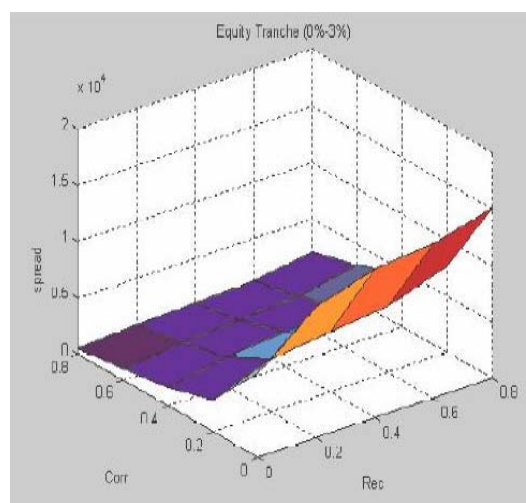
Les graphiques ci-dessous, représentent les surfaces des prix des trois tranches en fonction de différentes hypothèses sur le taux de recouvrement (supposé constant) et la corrélation :



Tranche Senior (pricer avec une copule gaussienne)



Tranche Mezzanine (copule gaussienne)



Tranche Equity (copule gaussienne)

Comme résultat général, on peut remarquer l'existence d'une relation entre les prix et la corrélation pour les différentes tranches de CDO :

- Elle est positive pour la tranche *senior*,
- Elle est négative pour la tranche *equity*,
- Pour la tranche *mezzanine*, elle semble être similaire à celle de la partie *equity* pour des valeurs de taux de recouvrement inférieures à 60%.

Pour des valeurs plus élevées de corrélation, le signe de la relation de cette tranche ressemble à celui de la tranche junior.

Concernant la dépendance vis-à-vis du taux de recouvrement, pour la tranche *senior* les *spreads* sont strictement décroissants, et l'inverse est constaté pour la tranche *equity*.

Conclusion

Les CDO représente donc une famille de produits financiers capable de transformer de manière structurée le risque d'un portefeuille d'actifs. Inexistants au début des années 80, leur croissance dépasse la plupart des estimations. En effet, le marché des CDO a su s'adapter au marché.

Tout d'abord, en ce qui concerne les motivations des acteurs, qu'elles soient d'arbitrage ou de réajustement de bilan financier, pour libérer des lignes de crédit, ou bien les deux à la fois, les CDO représente le produit répondant à ces attentes.

De plus les règles de paiement des parts peuvent varier d'une transaction à une autre. Ceci offre une grande flexibilité à la structure du produit. Mais sa mise en place nécessite une analyse, préalable, méthodique, précise, fiable et homogène avec les agences de notations.

L'avenir des CDO est loin d'être ternis. En effet, de nouveau CDO apparaissent et la diversité quant aux actifs du portefeuille sous-jacent s'accroît. Avec l'apparition des fonds de pension comme sous-jacent, les CDO eux-mêmes jouent parfois le rôle du sous-jacent, on observe ainsi des CDO de CDO.

Bibliographie

BLUHM Christian : **‘CDO Modeling : Techniques, Examples and Application’**.

Duffie D. and GARLEANU N. **‘Risk and Valuation of Collateralized Debt Obligations’**.

GOZLAN Olivier, Mémoire de DEA de Gestion Financière:

‘Analyse et Modélisation de CDO’.

GALIANI Stefano : **‘Copula functions and their application in Pricing and Risk .**

Managing Multiname Credit Derivative Products’.

PICONE Domenico **‘Collateralised Debt Obligations’**.

Moody’s Investors Service, special report: **‘The Binomial Expansion Method applied to CBO/CLO Analysis’**.

RONCALLI Thierry **‘Gestion des Risques Multiples’**.

Annexe A

Table1. Facteur de rating (Moody's)

Rating	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Aaa	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Aa1	11	15	14	12	11	11	10	10	10	10
Aa2	27	40	37	26	23	22	21	20	20	20
Aa3	59	95	83	56	49	46	44	41	40	40
A1	114	185	165	105	90	83	78	73	70	70
A2	214	350	313	192	161	146	137	126	120	120
A3	763	750	508	300	251	228	213	197	185	180
Baa1	1768	1400	790	461	378	343	321	298	277	260
Baa2	3339	2350	1171	667	543	493	463	432	395	360
Baa3	8250	5250	2412	1322	1048	925	833	753	679	610
Ba1	17089	10100	4410	2333	1815	1563	1358	1195	1060	940
Ba2	30643	17345	7305	3778	2891	2443	2058	1767	1543	1350
Ba3	55196	27545	11099	5438	4077	3373	2812	2380	2038	1766
B1	91929	41900	16331	7694	5541	4473	3679	3065	2590	2220
B2	140643	58350	21929	10072	7119	5663	4617	3811	3198	2720
B3	228250	83050	29658	13354	9298	7300	5962	4936	4120	3490

Table2. Taux de défaut (Moody's)

Rating	Factor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Aaa	1.50	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%
Aa1	1.40	0.00%	0.00%	0.01%	0.02%	0.03%	0.04%	0.05%	0.07%	0.08%	0.10%
Aa2	1.40	0.00%	0.01%	0.03%	0.05%	0.07%	0.09%	0.11%	0.14%	0.16%	0.20%
Aa3	1.40	0.00%	0.02%	0.06%	0.10%	0.14%	0.18%	0.23%	0.27%	0.33%	0.40%
A1	1.31	0.01%	0.04%	0.12%	0.19%	0.26%	0.33%	0.41%	0.48%	0.57%	0.70%
A2	1.31	0.01%	0.07%	0.22%	0.35%	0.47%	0.58%	0.71%	0.83%	0.98%	1.20%
A3	1.31	0.04%	0.15%	0.36%	0.54%	0.73%	0.91%	1.11%	1.30%	1.52%	1.80%
Baa1	1.25	0.09%	0.28%	0.56%	0.83%	1.10%	1.37%	1.67%	1.97%	2.27%	2.60%
Baa2	1.25	0.17%	0.47%	0.83%	1.20%	1.58%	1.97%	2.41%	2.85%	3.24%	3.60%
Baa3	1.25	0.42%	1.05%	1.71%	2.38%	3.05%	3.70%	4.33%	4.97%	5.57%	6.10%
Ba1	1.15	0.87%	2.02%	3.13%	4.20%	5.28%	6.25%	7.06%	7.89%	8.69%	9.40%
Ba2	1.15	1.56%	3.47%	5.18%	6.80%	8.41%	9.77%	10.70%	11.66%	12.65%	13.50%
Ba3	1.15	2.81%	5.51%	7.87%	9.79%	11.86%	13.49%	14.62%	15.71%	16.71%	17.66%
B1	1.07	4.68%	8.38%	11.58%	13.85%	16.12%	17.89%	19.13%	20.23%	21.24%	22.20%
B2	1.07	7.16%	11.67%	15.55%	18.13%	20.71%	22.65%	24.01%	25.15%	26.22%	27.20%
B3	1.07	11.62%	16.61%	21.03%	24.04%	27.05%	29.20%	31.00%	32.58%	33.78%	34.90%
Caa	1.00	26.00%	32.50%	39.00%	43.88%	48.75%	52.00%	55.25%	58.50%	61.75%	65.00%

Table3. Pertes totales espérées

Moody's "Idealized" Cumulative Expected Loss Rates (%)										
Rating	Year									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Aaa	0.00028	0.00011	0.00039	0.00099	0.00160	0.00220	0.00286	0.00363	0.00451	0.00550
Aa1	0.000314	0.00165	0.00550	0.01155	0.01705	0.02310	0.02970	0.03685	0.04510	0.05500
Aa2	0.000748	0.00440	0.01430	0.02585	0.03740	0.04895	0.06105	0.07425	0.09020	0.11000
Aa3	0.001661	0.01045	0.03245	0.05555	0.07810	0.10065	0.12485	0.14960	0.17985	0.22000
A1	0.003196	0.02035	0.06435	0.10395	0.14355	0.18150	0.22330	0.26400	0.31515	0.38500
A2	0.005979	0.03850	0.12210	0.18975	0.25685	0.32065	0.39050	0.45595	0.54010	0.66000
A3	0.021368	0.08250	0.19800	0.29700	0.40150	0.50050	0.61050	0.71500	0.83600	0.99000
Baa1	0.049500	0.15400	0.30800	0.45650	0.60500	0.75350	0.91850	1.08350	1.24850	1.43000
Baa2	0.093500	0.25850	0.45650	0.66000	0.86900	1.08350	1.32550	1.56750	1.78200	1.98000
Baa3	0.231000	0.57750	0.94050	1.30900	1.67750	2.03500	2.38150	2.73350	3.06350	3.35500
Ba1	0.478500	1.11100	1.72150	2.31000	2.90400	3.43750	3.88300	4.33950	4.77950	5.17000
Ba2	0.858000	1.90850	2.84900	3.74000	4.62550	5.37350	5.88500	6.41300	6.95750	7.42500
Ba3	1.545500	3.03050	4.32850	5.38450	6.52300	7.41950	8.04100	8.64050	9.19050	9.71300
B1	2.574000	4.60900	6.36900	7.61750	8.86600	9.83950	10.52150	11.12650	11.68200	12.21000
B2	3.938000	6.41850	8.55250	9.97150	11.39050	12.45750	13.20550	13.83250	14.42100	14.96000
B3	6.391000	9.13550	11.56650	13.22200	14.87750	16.06000	17.05000	17.91900	18.57900	19.19500
Caa	14.300000	17.87500	21.45000	24.13400	26.81250	28.60000	30.38750	32.17500	33.96250	35.75000

Annexe B

B.1. Générer des variables uniformes corrélées par la méthode des copules ⁵

1. Copule Gaussienne

L'algorithme permettant de générer des variables aléatoires issues d'une copule gaussienne $G_R^{Gaussienne}$ avec une matrice de corrélation R est le suivant :

- i. Trouver la matrice de Cholesky « A », correspondante à la matrice de corrélation R , telle que: $R = A \cdot A'$.
- ii. Simuler un vecteur de dimension N , $z = (z_1, z_2, \dots, z_N)'$ de variables indépendantes suivant la loi normale standard.
- iii. Calculer $x = z' \cdot A$.
- iv. Calculer $\mathbf{u} = \Phi(x)$.

On a donc, $\mathbf{u} \sim G_R^{Gaussienne}$

2. Copule de Student

L'algorithme permettant de générer des variables aléatoires issues d'une copule de student $G_{R,\nu}^{Student}$ avec une matrice de corrélation R et un degré de liberté ν , est le suivant :

- i. Trouver la matrice de Cholesky « A », correspondante à la matrice de corrélation R , telle que: $R = A \cdot A'$.
- ii. Simuler un vecteur de dimension N , $z = (z_1, z_2, \dots, z_N)'$ de variables indépendantes suivant la loi normale standard.
- iii. Simuler une variable aléatoire s suivant la loi χ_ν^2 .
- iv. Calculer $y = z' \cdot A$.
- v. Calculer $x = y \cdot \sqrt{\frac{\nu}{s}}$.
- vi. Calculer $\mathbf{u} = t_\nu(x)$.

⁵ L'algorithme est facilement programmable sous Gauss.

```
PROC Copula (Quel,R,DoF,N);
  LOCAL A,z,x,u,y,s;
  A=CHOL(R);
  z=RNDN(N,1);
  IF Quel==1;
    x=z*A;
    u=CDFN(x);
  ELSE;
    s=SUMC(RNDN(DoF,1)^2);
    y=z*A;
    x=(SQRT(DoF)/SQRT(s))*y;
    u=1-CDFTC(x,DoF);
  ENDIF;
  RETP(u);
ENDP;
```

On a donc, $\mathbf{u} \sim G_{R,\nu}^{Student}$

B.2. Générer la distribution des temps de défaut

Afin de simuler la distribution des temps des défauts, nous proposons l'algorithme suivant :

- i. Simuler un vecteur de dimension N , $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)'$ de variables uniformes suivant la copule C .
- ii. Calculer la probabilité de survie $S_n(t)$ comme indiquée dans la formule (10) pour chaque entité $n \in \{1, 2, \dots, N\}$.
- iii. Pour chaque entité, définir $\gamma_n(t) = \ln S_n(t)$.
- iv. Pour chaque entité, simuler le temps de défaut suivant :
$$\tau_n = \inf\{t > 0 / \gamma_n(t) \leq \ln u_n\}$$